黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 10 hours ago

$\partial = d/dx$ とおく。完全WKB解析では

$$\begin{aligned}&\hbar^2\partial^2 - Q(x)\\&\ = \hbar^2(\partial + P(x,\hbar))(\partial - P(x,\hbar)),\\&P(x,\hbar) = \sum_{n=0}^{\infty}\hbar^{n-1}P_n(x)\end{aligned}$$

で形式級数 $P(x,\hbar)$ を定義することから出発する。微分作用素の因数分解は次のRiccati方程式と同値:

$$Q(x) = \hbar^2(P(x,\hbar)^2 + \partial P(x,\hbar)).$$

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 10 hours ago

$Q(x), P(x,\hbar)$ の $x = z(x)$ に関する座標変換性は

$$\begin{aligned}&\widetilde{Q}(z)\,dz^2 = Q(x)\,dx^2 - \frac{\hbar^2}{2}\{x;z\}\,dz^2,\\&\{x;z\} = \frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2,\\&\widetilde{P}(x,\hbar)\,dz = P(x,\hbar)dx - \frac{1}{2}[x;z]\,dz,\\&[x,z] = \frac{x''}{x'}.\end{aligned}$$

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 10 hours ago

一方、共形場理論理論では

$$\widetilde{T}(z)\,dz^2 = T(x)\,dx^2 + \frac{c}{12}\{x;z\}\,dz^2.$$

であり、

$$a(x)a(y) \sim \frac{2}{(x-y)^2}$$

のとき

$$\begin{aligned}&\hbar^2\partial^2 - T(x)\\&\ = {:}(\hbar\partial + a(x)/2)(\hbar\partial - a(x)/2){:}\end{aligned}$$

すなわち

$$T(x) = {:}(a(x)/2)^2{:} + \hbar\partial(a(x)/2)$$

とおくと

$$c = 1 - 6\hbar^2$$

すなわち

$$\frac{c}{12} = \frac{1}{12} - \frac{\hbar^2}{2}.$$

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 9 hours ago

以上を比較すると、完全WKBと共形場理論のあいだには次のような明瞭な対応があることがわかる:

$$\begin{array}{c|c}
\text{完全WKB} & \text{共形場理論} \\
Q(x) & T(x) \\
P(x,\hbar) & \dfrac{1}{2\hbar}a(x) \\
-\dfrac{\hbar^2}{2} & \dfrac{c}{12} = \dfrac{1}{12} - \dfrac{\hbar^2}{2}
\end{array}$$

$1/12$ の項は量子化によって生じる anomaly だとみなせる。

要するに共形場理論におけるVirasoro代数のボソン化は完全WKBの量子化をやっているとみなせる。

twitter.com/genkuroki/status/4...

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 9 hours ago

完全WKBでは

$$\psi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} P(x', \hbar)\,dx'\right)$$

にBorel総和法を適用して、

$$(\hbar^2\partial^2 - Q(x))\psi(x) = 0$$

の解を構成する。

これの共形場理論での対応物はボソン場の頂点作用素

$$\Psi(x) = {:}\exp(\varphi(x)/(2\hbar)){:}$$

である。ここで $\varphi(x)$ は $\varphi'(x) = a(x)$,

$$\varphi(x)\varphi(y) \sim 2\log(x-y)$$

を満たす自由スカラーボソン場。

$\Psi(x)$ の共形次元は

$$\Delta = \frac{1}{4\hbar^2} - \frac{1}{2}.$$

$\psi(x)$ は $-1/2$ 形式とみなされるので、$1/(4\hbar^2)$ の項をアノマリーとみなせるなら、整合的。

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki 8 hours ago

しかし、正しい共形場理論での $\psi(x)$ の対応物は違う。正しい対応物は $(1,2)$ 退化場 $\Phi_{1,2}(x)$ もしくは $(2,1)$ 退化場 $\Phi_{2,1}(x)$ である。それらを記述するためには

$$\hbar = b - b^{-1}$$

とおく。このとき

$$\begin{aligned}\lambda_\pm &= \frac{b-b^{-1} \pm (2b-b^{-1})}{2} \\ &= \frac{3b-2b^{-1}}{2}, -\frac{b}{2}\end{aligned}$$

とおくと

$$\Phi_\pm(x) = {:}\exp(\lambda_\pm \varphi(x)){:}$$

が欲しい型の退化場になっている。これの共形次元は

$$\Delta = \frac{3b^2}{4} - \frac{1}{2}.$$

$\Phi(x) = \Phi_\pm(x)$ のどちらかは

$$:(b^{-2}\partial^2 - T(x))\Phi(x): = 0$$

を満たしている。

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki an hour ago

twitter.com/genkuroki/status/4...

に基いて退化場の記号の設定し直し。

$$\begin{aligned}&\hbar = b - b^{-1}, \\ &c = 1 - 6\hbar^2 = 1 - 6(b-b^{-1})^2\end{aligned}$$

(1,2)型退化場 $\Phi_{1,2}$ と(2,1)型退化場 $\Phi_{2,1}$:

$$\begin{aligned}&(L_{-2} - b^2 L_{-1}^2))\Phi_{1,2} = 0, \\ &L_0\Phi_{1,2} = ((3/4)b^{-2} - 1/2)\Phi_{2,1}, \\ &(L_{-2} - b^{-2} L_{-1}^2)\Phi_{2,1} = 0, \\ &L_0\Psi = ((3/4)b^2 - 1/2)\Psi\end{aligned}$$

これらを総称してレベル2の退化場という。

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki an hour ago

また色々わからなくなった。

解 $\psi(x)$ の対応物はレベル2の退化場でいいのだろうか？

昔のツイッターでの自分の発言を見たら、レベル2の退化場は方程式

$$(\hbar^2\partial^2 - Q(x))\psi = 0$$

の見かけの特異点の対応物であり、退化場から得られる共形ブロックが満たす線形微分方程式はモノドロミー保存変形の量子化のシュレーディンガー方程式になっている。その自分の発言が「正しい」。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 12 minutes ago

(1,2)退化場と $T(z)$ の作用素積展開:

$$\begin{aligned} & b^2 T(z)\Phi_{1,2}(x) \\ &= \left[\frac{b^2 L_0}{(z-x)^2} + \frac{b^2 L_{-1}}{z-x} + (b^2 L_{-1})^2 + \cdots\right]\Phi_{1,2}(x) \\ &= \left[\frac{3/4 - b^2/2}{(z-x)^2} + \frac{1}{z-x}b^2\partial + (b^2\partial)^2 + \cdots\right]\Phi_{1,2}(x) \end{aligned}$$

$(d/dz)^2 - q(z)$ の見かけの特異点 $z = x$ での $q(z)$ の展開は

$$q(z) = \frac{3/4}{(z-x)^2} + \frac{q_{-1}}{z-x} + (q_{-1})^2 + \cdots$$

の形になる(この条件を見かけの特異点の定義だと思ってよい).

以上の2つは極めて似ているので、これらが対応していると考えてよいだろう。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 5 minutes ago

一般にprimary filed $\Phi(x)$ は $(d/dz)^2 - q(z)$ の確定特異点 $z = x$ の量子化である。

確定特異点で $q(z)$ は2位の極を持つ。

primary field と $T(z)$ の作用素積展開は

$$b^2 T(z)\Phi(x) = \left[\frac{b^2\Delta}{(z-x)^2} + \frac{1}{z-x}b^2\partial + \mathrm{regular}\right]\Phi(x)$$

の形になり、$z = x$ に2位の極を持つ。

黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

モノドロミー保存変形(を記述する基本的な概念、確定特異点、見かけの特異点、Hamiltonian など)と共形場理論(における基本的な概念、primary filed、退化場、L_-1 など)の対応はものすごくわかりやすい。

おそらく「任意の」共形場理論は「何らかの拡張された意味での」モノドロミー保存変形の量子化になっているのだろう。

一方、完全WKBと共形場理論の対応は(まだ)よくわからない点が残っている。

完全WKBでは解を構成するという精密なことをやっているので難しいのだろう。

2017年06月07日 08:39 · Web · 0 · 1 · Webで開く